

행성 반지름과 그 의인화 캐릭터의 신장 사이의 관계 수식

루트

요약

본 연구에서는 루트의 태양계 천체 의인화 프로젝트 <그래도 행성은 돈다> 내의 물리량 설정에 대해 다룬다. 태양계 행성과 소행성에 관한 설정이며, 태양계의 유일한 항성인 태양과 태양계 밖의 항성에 관한 설정은 다루지 않는다. 우선적으로 행성, 소행성의 반지름을 신장으로 변환하는 공식의 필요성과 근거, 그리고 그 유도 과정에 대해 서술하였다.

서론

최근 과학 대중화를 위해 개인적인 흥미로 이전에 진행하던 태양계 천체 의인화 프로젝트 <그래도 행성은 돈다> 를 재개하게 되었고, 각 캐릭터의 외형과 성격이 갖는 의미에 대해 다시금 생각하게 되었다. 의인화 캐릭터의 외형과 성격이 의미가 있고 사람들에게 받아들여지려면, 각 캐릭터의 모든 요소는 직접적, 혹은 간접적으로 해당 캐릭터의 모티브가 되는 천체와 연관성이 있어야 한다.

머리 색, 의상과 소품, 그리고 성격 등에만 연관성 있는 요소를 적용한 타 프로젝트와 차별성을 두기 위해, <그래도 행성은 돈다> 캐릭터들의 신장과 체중 등의 물리적인 특성들은, 그와 관련이 있는 천체의 물리적 성질에서 간단한 수식을 통해 유도할 수 있도록 하기로 한다.

각 특성을 유도할 수 있는 공식의 장점, 즉 필요성은 다음과 같다.

A. 캐릭터와 그 모티브가 되는 천체 간의 연관성이 더 깊어지게 된다.

B. <그래도 행성은 돈다> 와 세계관을 공유하는 타 창작물이나, 이를 기반으로 하는 오리지널 캐릭터를 만드는 과정이 쉬워진다.

C. 기준만 명확하게 설정된다면, 이후 새 천체가 발견되었을 때 그들이 <그래도 행성은 돈다> 의 세계관에 쉽게 녹아들 수 있다.

모든 공식과 그 유도 과정을 한 편의 논문에 실을 수 없기에, 여기에서는 행성과 소행성의 반지름을 신장으로 변환하는 공식에 대해서만을 다룬다.

선행 이론

- 의인화 대상이 되는 천체의 기준 -

처음 <그래도 행성은 돈다>를 구상할 때부터 '항성이 아닌 천체의 경우에는 구형의 행성, 위성, 소행성' 만을 의인화 대상으로 한다는 나름의 규정을 만들었고, 여전히 이것을 지키고 있다. 이에 '구형의 천체' 의 기준이 어떠한지에 대해 먼저 생각해 보기로 한다.

I. 유체정역학적 평형 상태

유체정역학적 평형 상태란 천체 표면 및 내부의 어떤 지점에서 중력과 압력이 평형을 이루는 상태를 의미한다. 즉 구형을 유지하게 된다.

II. 유체정역학적 평형 상태인 천체

이론상으로, 반지름 약 400킬로미터 이상의 천체는 유체정역학적 평형 상태에 있어 둥근 모양을 가질 수 있다고 한다.

하지만 실제로 정역학적 평형을 유지할 수 있는 천체는 반지름이 764킬로미터 정도인 레아(Rhea)까지 이고, 이아페투스(Iapetus)와 그보다 작은 천체들은 구형을 유지하고는 있지만 정역학적 평형 상태는 아니라고 한다.

하지만, <그래도 행성은 돈다> 에서는 이론적으로 계산된 400킬로미터라는 값을 의인화 대상으로서의 기준으로 잡기로 한다. 그 이유는 아래와 같다.

III. 왜소행성의 정의

IAU에서 정한 왜소행성의 정의에 의하면, 왜소행성은 아래와 같은 조건을 만족해야 한다.

- A. 태양 주위를 공전하는 천체
- B. 스스로의 중력으로 유체정역학적 평형 상태를 유지하여 구형을 유지하는 천체
- C. 자신의 공전 궤도 주변에 있는 천체를 배제하지 못한 천체
- D. 위의 세 가지 조건을 만족하면서 위성이 아닌 것

왜소행성의 정의가 의인화 대상의 기준 값을 정하는 데에 도움이 되는 이유는, 위의 조건을 모두 만족한다고 결론지어진 천체, 즉 왜소행성의 구성원인 마케마케, 하우메아, 그리고 세레스가 모두 이아페투스보다 작은 반지름을 가지고 있기 때문이다. 여기에서 기준 값을 레아의 반지름인 764킬로미터로 한다면, 이들은

스스로의 중력으로 유체정역학적 평형 상태를 유지하지 못한다. 다른 말로 왜소행성의 두 번째 기준을 만족하지 못한다는 말이 된다.

IV. 반지름 400킬로미터 이상인 천체의 목록

따라서 의인화 대상이 되는 천체의 기준은 반지름 400킬로미터 이상인 천체로 정하며, 그 목록은 [표 1]과 같다. 각 천체의 반지름은 유효숫자 3자리를 기준으로 반올림하였다.

천체	반지름(km)
목성	69900
토성	58200
천왕성	25300
해왕성	24600
지구	6370
금성	6050
화성	3390
가니메데	2630
타이탄	2580
수성	2440
칼리스토	2410
이오	1820
달	1740
유로파	1560
트리톤	1350
명왕성	1180
에리스	1160
티타니아	788
레아	764
오베론	761
이아페투스	735
마케마케	715
하우메아	620
카론	604
움브리엘	585
아리엘	579
디오네	561
콰오아	555
테티스	531
세드나	500
세레스	482
오르쿠스	458
살라시아	425

[표 1] <반지름 순 태양계 천체 목록>을 바탕으로 한 태양계 천체-반지름 표

공식의 접근과 유도

I. 기준점 정하기

가장 큰 키와 가장 작은 키를 기준으로 하면 편하지만, 여기에서는 지구와 목성을 기준으로 잡았다.

A. 목성 - 주관적으로 정했던 행성과 항성의 기준점(200센티미터)보다 조금 적은 값

B. 지구 - 성인 남성의 평균 키

<그래도 행성은 돈다> 에서는 각각 191센티미터와 171센티미터로 정한다.

II. 범위의 상한선과 하한선 정하기

여기에서의 '범위'란, 항성이 아닌 천체를 의인화했을 때 키의 범위를 말한다.

요인	연령	2009
N	19~24세	208
	25~29세	252
	30~34세	271
	35~39세	269
평균	19~24세	174
	25~29세	174
	30~34세	173
	35~39세	172
표준편차	19~24세	6
	25~29세	6
	30~34세	7
	35~39세	7

[표 2] 2009년 문화체육관광부에 의해 조사된 성인 남성의 키

요인	연령	2009
N	19~24세	215
	25~29세	232
	30~34세	203
	35~39세	231
평균	19~24세	162
	25~29세	161
	30~34세	161
	35~39세	160
표준편차	19~24세	5
	25~29세	5
	30~34세	5
	35~39세	5

[표 3] 2009년 문화체육관광부에 의해 조사된 성인 여성의 키

[표 2], [표 3]은 2009년 문화체육관광부에 의해 조사된 한국인 성인남녀 키의 평균과 표준편차이다.

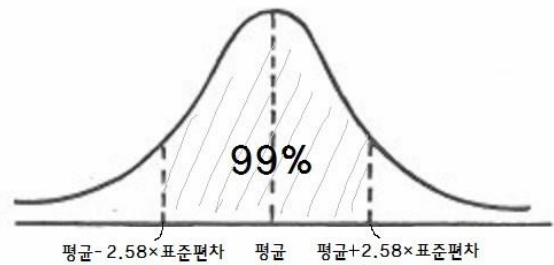
먼저 아래와 같이 가정한다.

A. 성인남녀 각각의 키를 확률변수로 갖는 확률밀도함수는 정규분포를 따른다.

B. 표본평균은 모평균과 같다.

기준이 되는 나이는 19~24세로 잡는데, 이는 <그래도 행성은 돈다> 캐릭터들의 외형이 대체적으로 이 나이 대와 비슷하기 때문이다.

이제 상위 0.5퍼센트와 하위 0.5퍼센트를 제외한 99% 키의 상한선과 하한선을 생각해 보자.



[그림 1] 정규분포곡선

[그림 1]을 통해, 닫힌 구간 $[(\text{평균}) + 2.58 \times (\text{표준편차}), (\text{평균}) - 2.58 \times (\text{표준편차})]$ 에 있는 키를 가진 사람들이 전체 인구의 99%가 된다는 것을 알 수 있다. <그래도 행성은 돈다> 에서는 남녀 모두를 다루므로, 남자 키의 상한선, 여자 키의 상한선, 남자 키의 하한선, 여자 키의 하한선의 값을 모두 구한 뒤 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

A. (남자 키 상한선) = $174 + (2.58 \times 6)$
= 189.48 (최대)

B. (여자 키 상한선) = $162 + (2.58 \times 5)$
= 174.90

C. (남자 키 하한선) = $174 - (2.58 \times 6)$
= 158.52

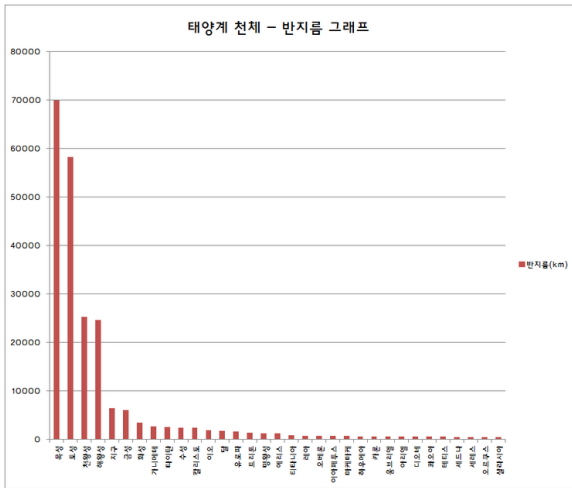
D. (여자 키 하한선) = $162 - (2.58 \times 5)$
= 149.10 (최소)

일의 자리에서 반올림을 한 후 10센티미터씩 여유를 둔다면, 항성이 아닌 천체가 의인화되

있을 때 최소 140센티미터부터 최대 200센티미터까지의 키를 가질 수 있다.

III. 유도하기

우선 [표 1]을 표가 아닌 그래프로 나타내어, 서로에 대한 상대적인 크기를 알기 쉽게 나타내 보았다.



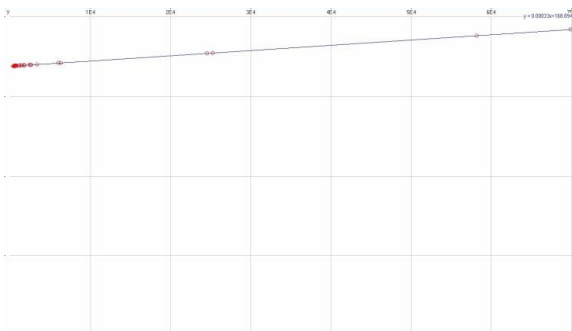
[그림 2] 태양계 천체-반지름 그래프

이 비율 그대로 공식을 유도하는 것이 효과적인지 알아보기 위해 위에서 정한 기준을 바탕으로 연립해 보자.

$$\begin{pmatrix} 6380 & 1 \\ 69900 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 171 \\ 192 \end{pmatrix}$$

$a = 0.0033, b = 168.8946$

위 두 값의 의미를 설명하자면, a값은 기울기, 즉 반지름 1킬로미터가 증가하였을 때 신장이 증가하는 양이며, b값은 y절편, 즉 키의 최솟값이다. 이 방법으로 공식을 유도한다면, 지구형 행성 이하의 천체들을 모티브로 한 캐릭터들의 키는 거의 구분할 수 없음은 물론, 위에서 구한 상한선과 하한선에도 맞출 수 없게 된다.



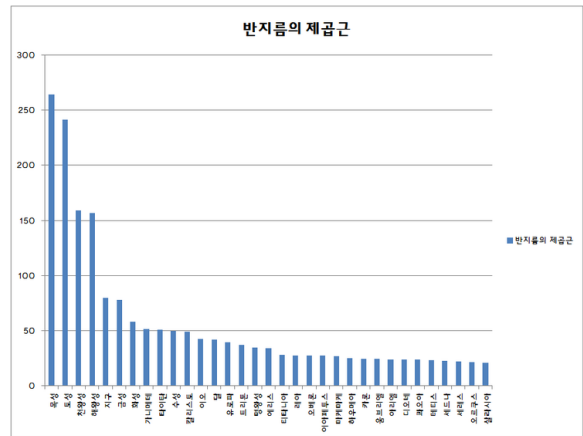
[그림 3] a,b 값을 대입한 일차함수의 그래프

위 수식을 그래프로 그려 보았다. 빨간 점이 각 캐릭터의 물리량을 나타내는데, 이 빨간 점의 분포를 보면 위에서 말했듯 반지름이 작은 천체들의 경우 키를 구분하기 어렵게 된다.

반지름이 작은 천체들의 키를 더 구분하기 쉽도록 하기 위해서는, 유도된 공식으로 그려진 함수의 그래프가 다음과 같은 개형을 띠면 된다.

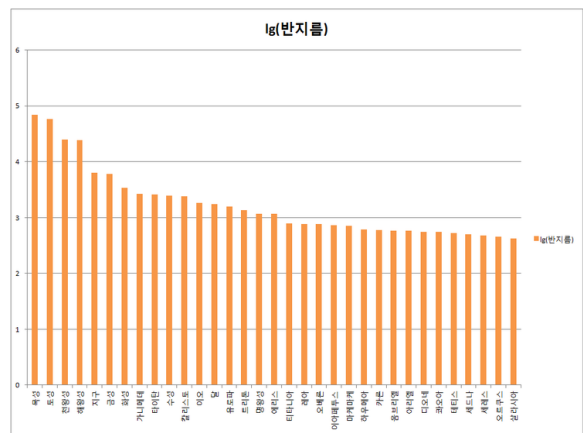
- A. 그래프가 $[0, \infty]$ 구간에서 항상 증가하며,
- B. 위로 볼록해야 한다.

이를 만족하는 함수에는 무리함수와 로그함수가 있다. 먼저 무리함수부터 살펴보자.



[그림 4] 태양계 천체-반지름의 제곱근 그래프

천체-반지름의 제곱근 그래프는 [그림 4]와 같다. 이 그래프 역시 [그림 2]와 마찬가지로 작은 천체들의 키를 거의 구분할 수 없다. 다음에는 로그함수를 살펴보자.



[그림 5] 반지름에 로그를 씌운 값의 그래프

로그함수의 경우 [그림 5]와 같이 각 값들의 분포가 대체로 고르다는 것을 알 수 있었고,

로그를 바탕으로 공식을 유도해 보기로 한다.

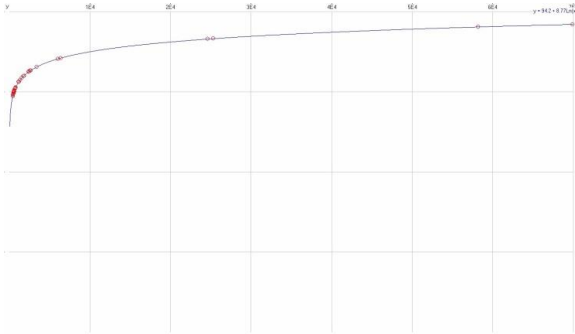
지구와 목성의 반지름에 상용로그를 취해서 다시 한 번 상수 a, b를 구하면,

$$\begin{pmatrix} \log 6380 & 1 \\ \log 69900 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 171 \\ 192 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3.8041 & 1 \\ 4.8445 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 171 \\ 192 \end{pmatrix}$$

$$a = 20.1845, b = 94.2161$$

이라는 값이 나오게 된다.



[그림 6] a, b 값을 대입한 로그함수의 그래프

[그림 6]과 같이 그래프를 그려 점들의 분포도를 보면, 반지름이 작은 천체든 큰 천체든 상관없이 키를 구분하기 쉽다는 것을 알 수 있다.

IV. 공식 정리하기

위에서 얻은 값들을 그대로 사용해도 되지만, 좀 더 외우기 편하게, 또 사용하기 편하게 a값과 b값을 단순화시켜도 된다.

외우기 쉽도록 하기 위해

$$a = 20, b = 95$$

로 단순화시켰고, 따라서 완성된 천체 반지름-캐릭터 신장 공식은 다음과 같다.

$$h(\text{cm}) = 20 \log_{10} r(\text{km}) + 95$$

결론 및 제언

태양계 천체에 관한 여러 이론들, 통계 결과와 같은 자료들, 그리고 간단한 수학 지식을 활용하여 천체 반지름-캐릭터 신장 공식을 유도하였다.

유도된 공식을 사용하여 각 캐릭터의 신장을 구해 보면 [표 4]와 같은 결과가 나온다.

천체	반지름(km)	신장(cm)
목성	69900	191.890
토성	58200	190.298
천왕성	25300	183.062
해왕성	24600	182.818
지구	6370	171.082
금성	6050	170.636
화성	3390	165.604
가니메데	2630	163.400
타이탄	2580	163.232
수성	2440	162.748
칼리스트	2410	162.640
이오	1820	160.202
달	1740	159.810
유로파	1560	158.862
트리톤	1350	157.606
명왕성	1180	156.438
에리스	1160	156.290
티타니아	788	152.930
레아	764	152.662
오베론	761	152.628
이아페투스	735	152.326
마케마케	715	152.086
하우메아	620	150.848
카론	604	150.620
움브리엘	585	150.344
아리엘	579	150.254
디오네	561	149.980
콰오아	555	149.886
테티스	531	149.502
세드나	500	148.980
세레스	482	148.660
오르쿠스	458	148.218
살라시아	425	147.588

[표 4] 공식을 사용하여 구한 캐릭터의 신장

위 결과는 무한소수가 나올 수밖에 없다. 그러나 캐릭터 프로필에 표기하기 위해서는 적절한 반올림이 필요하다. 이 공식을 사용할 때 총 세 번의 반올림을 하게 된다.

- 먼저 각 천체들의 반지름을 구할 때, 상용로그표를 사용하기 편하도록 유효숫자 세 자리만 남기고 반올림한다.
- 두번째로 상용로그표를 사용해 로그를 취할 때 상용로그표에 의해 소수 다섯째 자리에서 반올림된다.
- 마지막으로 공식에 대입해 구해진 키를 표기하기 쉽도록 소수 둘째 자리에

서 반올림한다.

이에 따라 위 결과를 다시 소수 둘째 자리에
서 반올림하면 [표 5]와 같은 값이 나온다.

천체	반지름(km)	신장(cm)
목성	69900	191.9
토성	58200	190.3
천왕성	25300	183.1
해왕성	24600	182.8
지구	6370	171.1
금성	6050	170.6
화성	3390	165.6
가니메데	2630	163.4
타이탄	2580	163.2
수성	2440	162.7
칼리스토	2410	162.6
이오	1820	160.2
달	1740	159.8
유로파	1560	158.9
트리톤	1350	157.6
명왕성	1180	156.4
에리스	1160	156.3
티타니아	788	152.9
레아	764	152.7
오베론	761	152.6
이아페투스	735	152.3
마케마케	715	152.1
하우메아	620	150.8
카론	604	150.6
움브리엘	585	150.3
아리엘	579	150.3
디오네	561	150.0
콰오아	555	149.9
테티스	531	149.5
세드나	500	149.0
세레스	482	148.7
오르쿠스	458	148.2
살라시아	425	147.6

[표 5] 반올림한 후의 반지름-신장 표

만들어진 공식은 고른 분포를 보이고 단순해,
각 천체들의 특성을 표현하는 데에 효과적이지만,
공식 유도 과정에서 다음과 같은 한계들이
있었다.

I. 천체의 반지름을 구할 때 사용했던 자료의 문제

직접 관련자료를 찾지 않고 다소 신뢰도가
떨어지는 영문판 위키백과의 자료를 사용하였

고, 특히 반지름 순 천체 목록이 그랬다. 관련
문서의 경우 한국어판, 일본어판 등 다른 언어
로 된 문서와의 차이가 심하기도 하고, 각 천
체에 관한 문서에서도 반지름의 차이가 있어
문제가 될 수 있었다.

II. 통계자료의 문제

성인 남성, 성인 여성의 키와 표준편차가 필
요했던 이유는 인류 전체를 대상으로 한 키의
분포를 조사할 필요성이 있었기 때문이었는데,
자료를 찾기 어려워 대신 한국인을 대상으로
한 키의 분포를 사용하였고, 최신 자료도 아니
었다.

또 앞으로 진행해야 할 연구는 다음과 같다.

I. 천체들의 다른 물리적 성질 변환 공식 유도

여기에서는 반지름과 신장에 관한 공식만을
다루었지만, 숫자로 표현할 수 있는 성질이면
무엇이든 각 캐릭터에 적용할 수 있도록 공식
을 유도할 것이다.

II. 항성의 물리적 성질 변환 공식 유도

항성이 아닌 천체와는 별개로, 항성들의 반
지름, 질량 등에 적용할 수 있는 새로운 공식
을 유도해야 한다.

참고 문헌

Mike Brown, How many dwarf planets
are there in the outer solar system?,
<http://web.gps.caltech.edu/~mbrown/dps.html>

Emily Lakdawalla, Iapetus' peerless
equatorial ridge, <http://www.planetary.org/blogs/emily-lakdawalla/2012/3389.html>

Wikipedia, List of Solar System objects
by size, <https://en.wikipedia.org/wiki/>

List_of_Solar_System_objects_by_size
Wikipedia, Dwarf planet, https://en.wikipedia.org/wiki/Dwarf_planet
문화체육관광부, 2009 국민체력실태조사,
<http://www.mcst.go.kr/main.jsp>
개념원리 적분과 통계, pp 271